1 Первый тур

Задача 1. Докажите, что среди любых 19 различных чисел из множества $1, 4, 7, \ldots, 100$ можно выбрать два с суммой, равной 104.

Решение. Поделим числа на пары $(4, 100)$, $(7, 97), \ldots,$ $(49, 55)$ так, что сумма чисел в каждой паре равна 104. При этом числа 52 и 1 не входят ни в одну пару. Всего чисел на доске 34, а значит пар - 16. Если предположить обратное, то в каждую пару входит не более одного из выбранных 19 чисел, а значит всего можно выбрать ≤ 18 чисел (по одному из пары, а также 52 и 1).

Задача 2. Найдите количество чисел от 1 до 2022, которые не делятся на $5, 13$ и 17.

Решение. Заметим, что количество чисел от 1 до 2022, которые делятся на какое то число n, будет равно $\left[\frac{2022}{n}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x. Посчитаем сначала количество чисел, которые делятся хотя бы на одно из данных чисел - это будет

$$\left[\frac{2022}{5}\right] + \left[\frac{2022}{13}\right] + \left[\frac{2022}{17}\right] = 404 + 155 + 118 = 677,$$

теперь отнимем те числа, которые мы посчитали дважды -

$$\left[\frac{2022}{5 * 13}\right] + \left[\frac{2022}{17 \cdot 13}\right] + \left[\frac{2022}{5 \cdot 17}\right] = 31 + 9 + 23 = 63$$

и прибавим числа, которые делится на все три числа, и которые мы не досчитали – $\left[\frac{2022}{5 \cdot 13 \cdot 17}\right] = 1$. Выйдет $677 - 63 + 1 = 615$. Этим мы посчитали количество чисел от 1 до 2022, которые делятся хотя бы на одно из этих чисел. Стало быть, количество неделящихся чисел будет равно $2022 - 615 = 1407$

Задача 3. Приходя в школу, Алихан здоровается со всеми одноклассниками (кроме, разумеется, самого себя). К началу уроков Алихан не успел поздороваться ровно с одной четвертью от общего числа учеников своего класса, в том числе с Байсеитом. А Байсеит к этому времени поздоровался ровно с одной седьмой из тех одноклассников, с которыми поздоровался Алихан. Какое наименьшее число учеников может быть в классе?

Решение. Алихан не успел поздороваться с одной четвертью всех учеников класса, а собирался поздороваться со всеми, кроме себя.

Таким образом, сам Алихан в эту четверть класса не входит, и значит, Алихан поздоровался с 3/4 от общего количества учеников в классе минус 1 (этот один – сам Алихан). А Байсеит поздоровался с одной седьмой от этого количества учеников. Значит, если количество тех, с кем поздоровался Байсеит, умножить на 7 и прибавить 1, должно получиться три четверти класса, т. е. число, делящееся на 3.

Попробуем подобрать такие числа. Если Байсеит поздоровался с одним человеком, то, умножив 1 на 7 и прибавив 1, получаем, что три четверти класса – это 8 человек. Но 8 на 3 не делится, значит, этот вариант невозможен. Если Байсеит поздоровался с двумя одноклассниками, то аналогично находим, что три четверти класса – это 15 человек. В этом случае в классе учится 20 человек. Если же Байсеит поздоровался с тремя или более одноклассниками, то три четверти класса – это 22 или более человек, и тогда число учеников класса больше 20.

Таким образом, подобранный нами пример дает наименьшее возможное число учеников класса.

Задача 4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB$. Точки X и Y на сторонах AB и BC, соответственно, таковы, что $CY = BX$. Докажите, что прямая XY касается описанной окружности треугольника LCY.

Решение. Очевидно, $\angle ABL = \angle LBC = \angle ACB$ и $BL = LC$. Следовательно, треугольники LBX и LCY равны по двум сторонам и углу. Тогда $\angle BXL = \angle LYC = 180^\circ - \angle LYB$, т. е. четырехугольник $BXLY$ вписанный. Следовательно, $\angle XYL = \angle XBL = \angle YCL$. Тогда прямая YX образует с хордой LY угол, равный вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. Значит, XY касается окружности LCY.

Задача 5. Дети в классе угощали друг друга конфетами. Каждый мальчик дал по конфете всем детям, кто его выше, а каждая девочка – всем, кто ниже ее (все дети разного роста). Оказалось, что какие то три человека получили поровну конфет, а все остальные – меньше, чем они. Докажите, что кто-то из этих троих – девочка.

Решение. Допустим, что это не так. Пусть мальчик Саша – наименьший по росту из трех упомянутых детей. Пусть X – следующий по росту ребенок. Заметим, что Саша и X получили поровну конфет от всех остальных детей. Действительно, каждый из остальных детей либо ниже и Саши, и X, либо выше их обоих. Тогда и Саша, и X получили конфеты только от мальчиков, которые меньше их ростом, либо от более высоких девочек.Кроме того, мальчик Саша дал конфету ребенку X, так как ребенок

X выше. Поскольку Саша – один из тех, кто получил наибольшее число конфет, не может быть так, что X получил больше конфет, чем Саша. Значит, X должен был дать конфету Саше. Получается, что X – девочка и у нее столько же конфет, но это значит, что среди этих трех детей есть девочка.

Задача 6. Найдите все пары (n, m) натуральных чисел, что $3 \cdot 2^n + 1 = m^2$.

Решение. Так как $n \geq 1$ и $2 \mid 3 \cdot 2^n = (m-1)(m+1)$, то $(m-1, m+1) = 2$. Значит в $m-1$ или $m+1$ двойка входит в простое разложение в степени ≤ 1, но тогда это число будет ≤ 6, так как максимум в него входит еще тройка в первой степени, а это значит, что $m - 1 \leq 6$, поэтому случай $n > 4$ невозможен. Если проверить n от 1 до 4, то ответы выходят только в случаях $n = 3$ и $n = 4$, и $m = 5$ и $m = 7$, соответственно

2 Второй тур

Задача 1. Докажите, что $2016 \cdot 2018 \cdot 2020 \cdot 2022 + 16$ – квадрат целого числа.

Решение. Заменим $2016 = t$, тогда

$$2016 \cdot 2018 \cdot 2020 \cdot 2022 + 16 = t(t+2)(t+4)(t+6) + 16 =$$

$$= (t^2 + 6t)(t^2 + 6t + 8) + 16 = (t^2 + 6t + 4)^2$$

Задача 2. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку K. Точка L – середина отрезка BK. Оказалось, что $\angle AKB = \angle ALC = 90°$, $AK = CL$. Найдите углы треугольника ABC.

Решение. Треугольники ALC и BKA равны по катету и гипотенузе, значит $AL = BK = 2LK$, но тогда в прямоугольном треугольнике ALK катет вдвое меньше гипотенузы, тогда угол ALK равен $60°$, тогда, поскольку $\angle ABL = \angle LAC$ из равных треугольников, имеем, что $\angle BAC = \angle BAL + \angle LAC = \angle BAL + \angle ABL = \angle ALK = 60°$, значит треугольник ABC равносторонний.

Задача 3. Из трехзначного числа вычли сумму его цифр. С полученным числом проделали то же самое и так далее, 100 раз. Докажите, что в результате получился ноль.

Решение. Представим число, которое вышло на каком то шаге, как $10a+b$, где $0 \leq b \leq 9$, тогда на следующем шаге, если $a = 0$, мы получим 0, а если $a > 0$, то мы отнимем $\geq b + 1$, а значит уменьшим значение a хотя бы на один - поэтому, если начальное значение a было равно $k \leq 99$, то за k ходов мы точно сделаем его равным 0, а дальше за один ход превратим в 0, поэтому нам понадобится $\leq k + 1 \leq 100$ ходов

Задача 4. Все натуральные числа удалось раскрасить в k цветов так, что разность любых двух чисел одного цвета не равна 2, 3 или 5. Найдите наименьшее возможное значение числа k.

Решение. Трех цветов не хватает: Допустим покрасили в 3 цвета (скажем, белый - б, черный - ч и красный - к). Пусть 1 - б, 3 - ч (они не могут быть одного цвета так как 3 - 1 = 2). 6 - к (6 и 3 разные, 6 и 1 разные). 4 - ч (4 и 1, 4 и 6 - разные). 8 - б (8 и 6, 8 и 3 - разные). 5 - к (5 и 8, 5 и 3 - разные). 7 - б (7 и 5, 7 и 3 - разные). Наконец, при покрашивании числа

2 противоречие, так как 2 и 4 (ч), 2 и 5 (к), 2 и 7 (б) разных цветов, но четвертого цвета нет.

Четырех цветов достаточно: покрасив нечетные числа чередуясь в белый, красный, синий, черный, белый и т.д. и покрасив четные числа так же (то есть числа будут покрашены так: б-б-к-к-с-с-ч-ч-б-б-...), разность между любыми двумя числами одного цвета либо равна 1, либо хотя бы 7.

Задача 5. На доске написано несколько целых чисел. Руслан своим ходом или увеличивает все числа на 1, или увеличивает все числа на 2, а Амир своим ходом стирает все числа, делящиеся на 11, или все числа, делящиеся на 17. Докажите, что Амир за несколько ходов сможет стереть все числа.

Решение. По китайской теореме об остатках, существует бесконечно много целых x таких, что x делится на 17 и $x-1$ делится на 11 (Например, $x = 34 + 17 \cdot 11k,\ k \in N$). Поэтому, для каждого написанного числа n можем отметить два подряд идущих числа больше n, одно из которых делится на 17, а другое на 11 и когда Руслан дойдет до них, то не сможет перескочить, так как не может увеличить число на хотя бы 3 и мы сотрем это число и так можем сделать с каждым записанным числом

Задача 6. Пусть a, b - различные натуральные числа, такие что $ab(a+b)$ делится на a^2-ab+b^2. Доказать, что $|a-b| > \sqrt[3]{\frac{ab}{3}}$.

Решение. Пусть $(a,b)=d$ - НОД чисел a и b. Представим тогда $a=dm$ и $b=dn$, где $(m,n)=1$, тогда, из делимости, $d^2(m^2-mn+n^2)|d^3mn(m+n) \Leftrightarrow m^2-mn+n^2|dmn(m+n)$.

Рассмотрим $d' = (m^2-mn+n^2, mn(m+n))$. Если $p|d'$ и $p|m$ для какого то простого числа p, то $p|m^2-mn+n^2 \Rightarrow p|n$, но $(m,n)=1$, значит d' взаимнопрост с m и, аналогично, взимнопрост с n. Тогда $d'|mn(m+n) \Rightarrow d'|(m+n)$, тогда $d'|(m+n)^2-m^2+mn-n^2 \Rightarrow d'|3mn$, откуда получаем, что $d'|3$, а значит $d' \le 3$. Теперь, из начальной делимости получаем, что $\frac{m^2-mn+n^2}{d'}|d \Rightarrow |a-b| = d|m-n| \ge d \ge \frac{m^2-mn+n^2}{d'} \ge \frac{m^2-mn+n^2}{3} \ge \frac{mn}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{ab}{3}}$ (последнее, после преобразований станет просто $d \ge \frac{mn}{3}$). При этом цепочка неравенств обращается в равенство только когда $m=n$, но числа различны, откуда неравенство обязано быть строгим.

3 Третий тур

Задача 1. Вычислите

$$\left[\frac{1}{17}\right]+\left[\frac{2}{17}\right]+...+\left[\frac{2022}{17}\right],$$

где $[x]$ - целая часть числа x.

Решение. Заметим, что $\left[\frac{17k}{17}\right]+\left[\frac{17k+1}{17}\right]+...+\left[\frac{17k+16}{17}\right]=17k$, поэтому можем поделить числа на группы по 17 подряд идущих с суммой равной 17 умножить на номер группы (первая группа - числа от 17 до 33, другие числа дают 0), тогда выйдет 117 полных групп и 13 чисел 118, то есть сумма равна

$$17(1+2+...+117)+13\cdot 118=118885.$$

Задача 2. Числа x и y удовлетворяют условиям $20x^3-15x=3$ и $x^2+y^2=1$. Найдите $|20y^3-15y|$.

Решение. $(20y^3-15y)^2=400y^6-600y^4+225y^2=400-1200x^2+1200x^4-400x^6-600+1200x^2-600x^4+225-225x^2=25-400x^6+600x^4-225x^2=25-(20x^3-15x)^2=16\Rightarrow|20y^3-15y|=4$

Задача 3. По кругу стоят 10 различных цифр. Любые три подряд идущие цифры в сумме не меньше m. Найдите наибольшее возможное натуральное значение числа m.

Решение. Вначале докажем, что m не больше 15. Выделим число 9, а оставшиеся 9 чисел разобьем на три тройки соседних чисел. Сумма чисел в этих трех тройках равна $0+1+2+3+...+8=45=36$, поэтому хотя бы в одной из рассматриваемых троек сумма чисел не больше 12.

Пример расстановки чисел по кругу, при котором m равно 15: 8 4 0 9 3 2 7 5 6 1.

Задача 4. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD=CE$. На отрезке BC выбрана точка X, а на отрезке BD – точка Y, причём $CX=EX$ и $AY=DY$. Лучи YA и XE пересекаются в точке Z. Докажите, что середина отрезка BZ лежит на прямой AE.

Решение. $CD=AE$, $\angle ZAE=180^\circ-\angle YAD=180^\circ-\angle YDA=\angle BDC$ (из $AY=YD$), $\angle BCD=\angle AEZ$ (из $EX=XC$) $\Rightarrow\Delta ZAE=\Delta BDC$, откуда высоты, опущенные из B и Z на AC, равны, но тогда AC пересекает ZB в середине.

Задача 5. Найдите количество упорядоченных троек целых чисел таких, что $x + y + z = 30$ и $x \geq -1,\ y \geq -2,\ z \geq -3$.

Решение. Сопоставим каждому решению $a + b + c = 39$ с $a, b, c\ \in \mathbb{N}$ такое решение x, y, z из условия по принципу $(x, y, z) = (a - 2, b - 3, c - 4)$ и наоборот, каждому x, y, z из условия сопоставим a, b, c по принципу $(a, b, c) = (x + 2, y + 3, c + 4)$, тогда количества упорядоченных троек, которые удовлетворяют этим двум уравнениям - равны, но известный факт, что уравнению $a + b + c = 39$ удовлетворяют $C_{39-1}^{3-1} = \frac{38 \cdot 37}{2} = 703$

Задача 6. На плоскости дано 400 точек. Доказать, что множество различных попарных расстояний между ними содержит не менее 15 чисел.

Решение. Пусть множество попарных расстояний содержит только ≤ 14 чисел. Рассмотрим какие то две данные точки A и B, все остальные точки могут лежать только на окружностях с центрами A и B и радиусами из данных попарных расстояний. Заметим, что любая пара окружностей пересекается по не более чем двум точкам, а значит всего может быть отмечено $\leq 2 \cdot 14 \cdot 14 + 2 = 394$, но точек 400, откуда противоречие

4 Четвертый тур

Задача 1. Расставьте в клетках указанной фигурки числа от 5 до 14 так, чтобы суммы чисел во всех доминошках были разными (доминошка – это прямоугольник, состоящий из двух клеток, соседних по стороне).

Решение. Пример на рисунке

5	6	8	11
7	9	12	
10	13	14	

Задача 2. Найдите наибольшее такое n, что существуют n различных натуральных чисел, из которых нельзя выбрать три с суммой, равной составному числу.

Решение. Среди этих чисел не могут быть все остатки mod 3, иначе сумма трех различных чисел будет делиться на три, а значит будет составной. Аналогично не может быть трех одинаковых остатков, а значит всего чисел не более 4.

Пример для 4 чисел: $1,\ 3,\ 7,\ 9$

Задача 3. На продолжении стороны AB параллелограмма $ABCD$ за точку A отметили точку E. Оказалось, что $ED = DB = BA$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ABD лежит на прямой EC.

Решение. Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABD, тогда $\angle BHD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD$, значит $BCDH$ – вписанный. Также H лежит на серидинном перпендикуляре к BE, а значит $\angle CHD = \angle DBC = \angle BCD = 180^\circ - \angle BHD = 180^\circ - \angle EHD$, тогда $E,\ H,\ C$ лежат на одной прямой.

Задача 4. Каждая клетка таблицы n x n закрашена в белый или черный цвет. В углах таблицы стоят 3 белые и 1 черная клетки. Докажите, что существует квадрат 2 x 2 с нечетным количеством белых клеток.

Решение. Предположим, что в таблице нет такого квадрата. Рассмотрим любую строку таблицы. Допустим, что под какой то клеткой этой строки стоит клетка противоположного цвета, тогда во всех клетках будет стоять противоположный цвет. В противоположном же случае, во всех клетках стоит тот же цвет, что и сверху. То есть строки либо меняются полностью, либо остаются такими же. Так как в углах стоят 3 белых клетки и одна черная, то в какой то "крайней"строке будут две белые угловые клетки, но тогда в противоположной "крайней"строке должно быть либо две черные угловые, либо также две белые, но там будет одна черная и одна белая, откуда противоречие

Задача 5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что существует два набора из n подряд идущих натуральных чисел и $n + 1000$ подряд идущих натуральных чисел, что произведения чисел в этих наборах равны.

Решение. Рассмотрим $n = k(k+1)...(k+1000) - (k+1000)$ и наборы чисел от k до $k+n+999$, и от $k+1001$ до $k+n+1000$. Можно легко проверить, что равенство их произведений равносильно тому равенство, которое мы записали изначально, а также можно проверить, что таких n бесконечно много.

Задача 6. Мирон и Ярослав играют в игру. Мирон загадал число из трех цифр от 1 до 8. Ярослав может попробовать угадать его, назвав число, также состоящее из трех цифр от 1 до 8. Если число, названное Ярославом, и число, загаданное Мироном совпадает в хотя бы двух разрядах, то Ярослав побеждает. Всегда ли сможет Ярослав победить, если Мирон даст Ярославу только 32 попытки?

Решение. Пусть Ярослав сначала назовет следующие 16 чисел: 222, 424, 626, 828

244, 446, 648, 842

266, 468, 662, 864

288, 482, 684, 886

Дело в том, что эти числа дают всевозможные четные пары на каждых двух местах (то есть, если у Мирона число, в котором какие то две цифры четные, то Ярослав уже победил). Теперь нам нужно сделать тоже самое, только с нечетными числами. Для этого в прошлой расстановки каждую цифру уменьшим на 1 и получим требуемое

5 Финал 1

Задача 1. На доске записаны числа $1,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5$. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность – неотрицательное число.

Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 15?

Решение. Искомая последовательность операций видна из следующей записи: $15 = 32 - 16 - (8 - 4 - 2 - 1)$.

Задача 2. Найдите последнюю цифру числа $1^{2020} + 2^{2020} + 3^{2020} + ... + 2022^{2020}$

Решение. Посчитаем сначала последнюю цифру суммы $1^{2020} + 2^{2020} + ... + 10^{2020}$. Если a не делится на 5 и 2, то $a^4 \equiv 1\ (mod\ 10)$ (например, из теоремы Эйлера). Если оно делится и на 2 и на 5, то последняя цифра равна 0. Если только на 2, то равна 6. Если на 5, то равна 5. При возведении в степень, все эти остатки не меняются, а также 2020 делится на 4. Из всего сказанного легко следует, что сумма равна $6 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 0 + 5 = 3\ (mod\ 10)$, тогда общая сумма будет $202 \cdot 3 + 1 + 6 = 3\ (mod\ 10)$, то есть последняя цифра равна 3

Задача 3. У Нуртаса есть набор из 36 камней массами 1 г, 2 г, ..., 36 г, а у Шынтаса есть суперклей, одной каплей которого можно склеить два камня в один (соответственно, можно склеить три камня двумя каплями и так далее). Шынтас хочет склеить камни так, чтобы Нуртас не смог из получившегося набора выбрать один или несколько камней общей массой 37 г. Какого наименьшего количества капель клея ему хватит, чтобы осуществить задуманное?

Решение. Пример. Склеив попарно камни с массами 1 и 18, 2 и 17, ..., 9 и 10, Шынтас получит набор, в котором каждый камень весит от 19 до 36 г, поэтому одного камня Нуртасу будет мало, а двух – уже много.

Оценка. Если Шынтас использует только 8 капель, то в склейках будут участвовать не больше 16 исходных камней. Поэтому хотя бы одна из 18 пар $\{1, 36\}, \{2, 35\}, \ldots, \{18, 19\}$ окажется нетронутой, и Нуртас сможет выбрать её.

Задача 4. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка P такова, что $DOCP$ – тоже параллелограмм (CD – его диагональ). Обозначим через Q точку пересечения BP и AC, а через R – точку пересечения DQ и CP. Докажите, что $PC = CR$.

Решение. Заметим, что отрезки DP и BC параллельны и равны. Поэтому $BOPC$ – параллелограмм, откуда $QC = \frac{OC}{2} = \frac{PD}{2}$. Таким образом, отрезок QC с концами на сторонах RD и RP треугольника DRP параллелен стороне DP этого треугольника и равен её половине. Значит, он является средней линией этого треугольника (иначе он вместе со средней линией образовывал бы параллелограмм, что невозможно, так как прямые RD и RP не параллельны). Следовательно, C – середина отрезка RP, что и требовалось доказать.

Задача 5. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) таких, что $a^{2b} - b^a = (\frac{(a^2(a-b)^2)}{4})^b$.

Решение. Лемма: Если a, b, x, y - натуральные числа такие, что $(a, b) = (x, y) = 1$ (НОДы этих чисел равны 1) и $ax = by$, то $a = y$ и $b = x$.

Доказательство: $y|ax \Rightarrow y|a$ и $a|by \Rightarrow a|y$, значит $a = y, b = x$.

$a^{2b} > a^{2b} - b^a = (\frac{(a^2(a-b)^2)}{4})^b$. Сократив на a^{2b}, получаем $\frac{(a-b)^2}{4} < 1 \Rightarrow a - b = 1, 0$ или -1

Случай 1. $a - b = 1 \Rightarrow a^{2b} - b^a = \frac{a^2b}{4^b} \Rightarrow 4^b b^{b+1} = (b + 1)^{2b}(4^b - 1)$. 4^b и $4^b - 1$ взаимно простые, b^{b+1} и $(b + 1)^{2b}$ взаимно простые. Значит по лемме, $(b + 1)^{2b} = 4^b, (b + 1)^2 = 4 \Rightarrow b = 1$. Но $b = 1$ не подходит.

Случай 2. $a - b = 0 \Rightarrow a^{2a} - a^a = a^a(a^a - 1) = 0$. $a = b = 1$ - единственное решение.

Случай 3. $a - b = -1 \Rightarrow a^2b - b^a = \frac{a^{2b}}{4^b}$. $4^b b^{b-1} = (b - 1)^{2b}(4^b - 1)$ Аналогично случаю 1, по лемме, $(b - 1)^{2b} = 4^b \Rightarrow (b - 1)^2 = 4 \Rightarrow b = 3$, но $b = 3$ не подходит. Значит (1,1) - единственное решение

Задача 6. Точка P не лежит ни на одной из диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, но лежит внутри него. Докажите, что $S_{PAB} \cdot S_{PCD} \neq S_{PBC} \cdot S_{PAD}$

Решение. Воспользуемся следующим утверждением: Дан треугольник ABC и точка P. Пусть $PB \cap AC = X$, тогда $\frac{S_{PBA}}{S_{PBC}} = \frac{AX}{CX}$. Для этого достаточно понять, что обе эти дроби равны отношению длин перпендикуляров из точек A и C, соответственно, на прямую PB

Теперь к задаче, пусть $PC \cap BD = X$ и $PA \cap BD = Y$, тогда $X \neq Y$, так как P не лежит на диагонали, а значит $\frac{S_{PBC}}{S_{PCD}} = \frac{BX}{XD} \neq \frac{BY}{YD} = \frac{S_{APB}}{S_{APD}}$, что и требовалось

Задача 7. На доске написана пара числа $(1, 1)$. Если для некоторых x и y на доске написана одна из пар $(x, y - 1)$ и $(x + y, y + 1)$, то можно дописать другую. Докажите, что в каждой выписанной паре первое число будет положительным.

Решение. Назовем дискриминантом пары чисел (a, b) величину $D(a, b) = b^2 - 4a$. Докажем, что дискриминант всех пар чисел, записанных на доске не меняется. Действительно, дискриминант пары чисел, записанной изначально, равен $D(1, 1) = -3 < 0$. Далее, верны следующие соотношения:

$$\frac{D(x, y-1)}{D(x+y, y+1)} = \frac{y^2 - 4x - 2y + 1}{y^2 - 4x - 2y + 1} = 1$$

Поэтому на доске ни в какой момент не может появиться пара с положительным дискриминантом. Теперь рассмотрим любую выписанную на доску пару (a, b). В ней первое число a равно $\frac{b^2 - D}{4} > \frac{b^2}{4} > 0$ и, следовательно, больше 0, что и требовалось доказать.

Задача 8. На доске написаны числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$, где m и n - различные взаимнопростые числа. За ход разрешается написать на доску число $\frac{x+y}{2}$ или $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}$, если до этого на доске были числа x и y. Может ли на доске появиться число 1, если

a) $m + n = 2048$

b) $m + n = 2022$

Решение. a)Используя только первую операцию, на доску можно записать любое число вида

$$\frac{x\frac{m}{n} + (2^k - x)\frac{n}{m}}{2^k}$$

для натурального k и $x < 2^k$ (В этом несложно убедиться, если начать применять первую операцию и посмотреть на результаты). Возьмем теперь $x = n$ и $k = 10$, тогда значение дроби будет равно 1.

b)Рассмотрим сумму знаменателя и числителя в любой момент. Для первых двух чисел верно, что она делится на 3, но ни числитель не знаменатель при этом не делятся. Пусть мы применили операцию к числам $\frac{x}{y}$ и $\frac{a}{b}$, для которых это свойство выполнено. Тогда при выполнении первой операции получится $\frac{bx+ay}{2by}$, при выполнении второй операции выйдет $\frac{2ax}{ay+bx}$. В первом случае сумма числителя и знаменателя равна $b(x+y)+y(a+b)$, а во втором случае равна $a(x+y)+x(a+b)$. В обоих случаях, сумма делится на 3. Теперь, мы знаем, что b и y не делятся на три, а значит $2by$ тоже не делится. Аналогично с $2ax$. А это значит, что для двух дробей, которые могли получится, выполнено указанное свойство, а значит оно выполнено для всех чисел на доске, но у 1 - сумма числителя и знаменателя равна 2, что не делится на три, откуда противоречие

6 Финал 2

Задача 1. В каждой клетке таблицы 3х3 написано действительное число. В каждой строке и в каждом столбце произведение чисел в клетках равно 1, а в каждом квадрате 2х2 оно равно 1/2. Найдите числа, написанные в клетках таблицы.

Решение. Обозначим числа, записанные в клетках так, как показано на рис. По условию $efhi = \frac{1}{2}$, $(beh) \cdot (cfi) = 1$, значит $bc = 2$. Из того что $abc = 1$ следует, что $a = \frac{1}{2}$. Аналогично получаем, что $c = g = i = \frac{1}{2}$. Остальные значения ($b = d = f = h = 4, e = \frac{1}{16}$) легко получаются из того, что произведения в столбцах и строках равны 1.

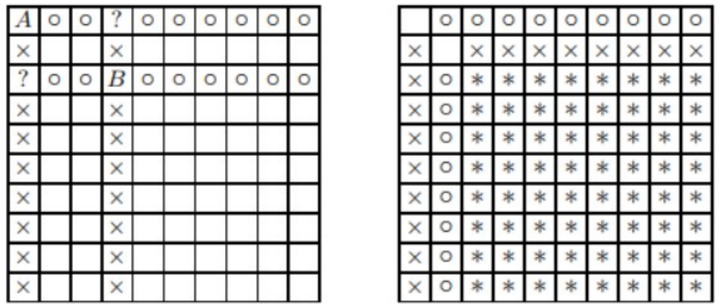
a	b	c
d	e	f
g	h	i

Задача 2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. На прямой, проходящей через точку C перпендикулярно BC отмечена точка D такая, что $CD = AC$ и точка D находится в разных полуплоскостях с точкой A относительно прямой BC. Отрезки BC и AD пересекаются в точке E. Оказалось, что $AC = 3EC$. Найдите $\frac{AB}{EC}$.

Решение. $\angle BAE = 90° - \angle DAC = 90° - \angle ADC = \angle BEA \Rightarrow BA = BE = y$, тогда по теореме Пифагора, $y^2 + 9x^2 = (x + y)^2$, откуда легко получить, что $y = 4x$, значит $\frac{AB}{EC} = 4$

Задача 3. Некоторые клетки таблицы 10х10 заполнены единицами или ноликами (каждая клетка заполнена не больше чем одним числом). Известно, что нет строки или столбца, полностью заполненного 10-ью единицами или 10-ью ноликами, но если в любую пустую клетку поставить любое из двух чисел, то это условие нарушится. Найдите наибольшее возможное количество пустых клеток

Решение. Ответ: 2. Пусть мы заполнили таблицу согласно условию, а клетка A свободна. Так как при постановке в нее любого значка должна получаться линия из одинаковых значков, то существует линия, содержащая ее, в которой все остальные клетки заполнены крестиками, и то же самое верно для ноликов (эти линии должны быть, естественно, строкой и столбцом). В частности, все свободные клетки стоят в разных строках и столбцах.



Предположим, что пустых клеток больше двух. Тогда для двух из них (скажем, для A и B) направления линии крестиков совпадают (то есть либо для обеих крестики стоят в их горизонталях, либо для обеих – в вертикалях). Пусть крестики стоят в их столбцах, а нолики – в их строках; тогда в пересечении строки, содержащей A, со столбцом, содержащим B, должен стоять и крестик, и нолик (ибо это пересечение непусто); противоречие. Значит, пустых клеток не больше двух. Пример с двумя пустыми клетками приведен на рисунке (вместо звездочек могут стоять любые значки).

Задача 4. Крокодилом называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на N клеток в перпендикулярном направлении (при $N = 2$ крокодил – это шахматный конь).

При каких N крокодил может пройти с каждой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

Решение. Будем считать, что рассматриваемая бесконечная шахматная доска, как и обычная, раскрашена в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. Тогда при нечётном N крокодил будет ходить только по клеткам одного цвета, и, тем самым не может пройти на любую клетку.

Докажем, что при чётном N крокодил может пройти с каждой клетки на любую. Достаточно доказать, что он может пройти с любой клетки на соседнюю (смежную по стороне). Покажем, например, как пройти из клетки в соседнюю с ней сверху. Первым ходом ходим на одну клетку вправо и N клеток вверх, а вторым – на одну вправо и N вниз. Так мы окажемся на две клетки правее исходной. Повторив эту пару ходов $\frac{N}{2}$ раз, мы окажемся на N клеток правее исходной. Теперь пойдем на одну клетку вверх и N влево.

Задача 5. На доске написаны числа $1, 2, ..., 1000$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа $a^4 + b^4$ и a^2b^2. Можно ли такими операциями добиться, чтобы среди чисел, написанных на доске, было хотя бы 900 одинаковых?

Решение. Рассмотрим количество чисел на доске, которые делятся на пять. Если мы применили операцию к двум числам, делящимся на пять, то получившиеся два числа тоже делятся на пять. Если только одно число делилось на пять, то среди полученных двух чисел на пять делится только a^2b^2. Если же ни одно из a и b не делилось на пять, то $a^4 + b^4 \equiv 2 \ (mod\ 5)$ (по малой теореме Ферма) и a^2b^2 также не делится. То есть количество чисел делящихся на пять и, соотвественно, не делящихся на пять не меняется. Поэтому, если мы получили 900 одинаковых чисел, то все они одного вида, но чисел одного вида будет либо 200, либо 800, откуда противоречие

Задача 6. На доске по очереди записаны n ненулевых чисел, где n нечетное число. За одну операцию Петя может выбрать 3 подряд идущих числа a, b, c (в таком порядке) и заменить их на одно число $\frac{ac}{b}$. Петя совершает такие операции до тех пор, пока не останется одно число. Докажите, что как бы Петя не совершал операции, конечное число всегда одинаковое.

Решение. Пусть изначально написаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Введем значение $S = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \cdots \cdot a_n$. Так как n нечетное, a_n будет умножаться. Пусть Петя совершил операцию над числами a_k, a_{k+1}, a_{k+2}. Если k - нечетное, то новое значение S будет $S = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \cdots \cdot \frac{\frac{a_k a_{k+2}}{a_{k+1}}}{a_{k+3}} \cdot \cdots \cdot a_n$, то есть S не поменяется. Если же k четное, то S станет $S = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{k-1}}{\frac{a_k a_{k+2}}{a_{k+1}}} \cdot \cdots \cdot a_n$, значит тоже не поменяется. Значит значение S будет таким же и для конечного набора чисел на доске, значит последнее число равно S, что не зависит от порядка операций, выполненных Петей.

Задача 7. На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Ерсултан и Ибрахим играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Ерсултан; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Ибрахим выигрывает, если после окрашивания всех точек найдётся равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причём в один и тот же цвет. Может ли Ерсултан ему помешать?

Решение. Приведем стратегию, позволяющую Ибрахиму гарантированно выиграть. Первые ходы он делает произвольно, пока перед его очередным ходом не будут окрашены 33 точки. Пусть A – одна из крайних окрашенных точек, а B – неокрашенная точка, соседняя с другой крайней. Тогда существует отмеченная точка C такая, что ABC – равносторонний треугольник. На этом ходе Ибрахим красит точку B в тот же цвет, что и A (без ограничения общности, красный). Далее он действует так. Если Ерсултан красит точку, соседнюю с C, то Ибрахим красит C в красный цвет и выигрывает, получив одноцветный треугольник ABC. Если же Ерсултан красит точку, несоседнюю с C, то и Ибрахим тоже красит несоседнюю с C. Если Ибрахим сможет так действовать, то в результате точку C окрасит именно он и выиграет. Предположим, что он не смог сходить согласно стратегии. Это значит, что Ерсултан окрасил несоседнюю с C точку, а Ибрахим не имеет такой возможности. Это значит, что остались неокрашенными ровно три точки: C и два ее соседа. Но тогда окрашено 96 точек, и ход должен делать Ерсултан. Полученное противоречие завершает решение.

Задача 8. Вершина F параллелограмма $ACEF$ лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Известно, что $AC = AD$ и $AE = 2CD$. Докажите, что $\angle CDE = \angle BEF$.

Решение. Пусть M – середина отрезка CF. Поскольку четырехугольник $ACEF$ – параллелограмм, точка M является серединой отрезка AE. Обозначим $\angle MAC = \angle MEF = \alpha$ и $\angle ABC = \angle ADC = \angle ACD = \beta$. Так как $AM = \frac{1}{2}AE = CD$, $AMCD$ – равнобокая трапеция, откуда получаем, что $\alpha = \angle MAC = \angle MDC$ и $MD = AC = AD$. Кроме того, поскольку $MA = CD = AB$ и $\angle ABM = \angle ADC = \beta$, равнобедренные треугольники ABM и ACD подобны, поэтому $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CD}$. Треугольники BME и EMD также подобны, так как $\angle BME = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \angle DMA = \angle EMD$ и $\frac{BM}{ME} = \frac{BM}{MA} = \frac{CD}{AD} = \frac{MA}{MD} = \frac{EM}{MD}$. Значит, $\angle BEM = \angle EDM$, откуда $\angle BEF = \angle BEM - \alpha = \angle EDM - \alpha = \angle CDE$, что и требовалось.